

АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТРУКТУРНИХ МОДЕЛЕЙ КОМПЕТЕНЦІЙ В ПРОЕКТНОМУ УПРАВЛІННІ

Лук'янов Д. В., Колесніков О. Є., Дмитренко К. М., Гогунський В. Д.

1. Вступ

Метод Леонарда Ейлера щодо пошуку циклів у графах використовує процедуру послідовного перебору вершин у поєднанні з прийомом фарбування тих ребер графа, які вже пройдені [1]. Визначення циклів на графах за цим алгоритмом фактично реалізує схему повного перебору всіх можливих варіантів з наявністю евристичної складової, що вносить певну невизначеність у разі формалізації для автоматизованого розв'язання задачі. Визначення циклів у орієнтованих графах, що відображають топологію проектів, є актуальним завданням для розв'язання низки задач.

Для розв'язання задачі аналізу структурних схем проектів пропонується використовувати метод аналітичного визначення циклів в складних схемах управління. На відміну від відомого методу Леонарда Ейлера, цикл визначається в результаті аналітичного розрахунку, а не евристичного пошуку. Основою для аналітичного розв'язання задачі є використання характерних властивостей матриці суміжності [2].

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

В різних галузях для структуризації знань і відображення внутрішніх відношень між елементами систем використовуються орієнтовані графи. В проектному менеджменті це і схеми управління проектами, і модель компетенцій. Властивості цих об'єктів ще не вивчені в повній мірі.

Об'єктом даного дослідження є модель компетенцій у сфері професійного управління проектами, що запропонована Міжнародною асоціацією управління проектами [3]. Починаючи з версії 3.0, це не тільки представлення структури самих компетенцій (у зазначеній версії 3.0 - «технічних», «поведінкових» і «контекстуальних» і їх елементів), але і взаємодії між елементами компетенцій [4]. Таке представлення компетенцій, як системи взаємопов'язаних взаємозалежних елементів, дозволяє застосувати для їхнього аналізу теорію графів для більш точно визначення топології такої системи з виділенням найбільш стійких їхніх компонентів.

Одним з найбільш проблемних місць в застосуванні подібних систем є одночасно і найсильнішою стороною, за задумом її творців - універсальність. З урахуванням, все-таки, значеного галузевого впливу, зокрема про що свідчить наявність «Галузових розширень» для стандарту з управління проектами РМВОК [5]. «Галузеві розширення» створені на основі відповідного стандарту, що визначає вимоги до компетенцій з боку американського Інституту управління проектами [6]. Необхідно враховувати специфіку діяльності, зокрема можливі додаткові елементи компетенцій, або зміну взаємозв'язків в базовій «уні-

версальної» структурі. Вимоги до оцінки компетенцій, а, з іншого боку, і до системи підготовки фахівців у сфері проектного управління було б логічно гармонізувати з галузевою специфікою, чого універсальна модель не пропонує. Тому в даному дослідженні пропонується розв'язати це протиріччя на основі аналізу системи компетенцій, як орієнтованого графа.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є удосконалення методу аналітичного виділення замкнених циклів в орієнтованих графах складних топологічних структур проектних систем.

Для досягнення мети означені наступні задачі:

1. Дослідити властивості ступенів матриць суміжності орієнтованих графів.
2. Розробити методику ідентифікації циклів у графах на основі формування матриці досяжності з подальшим її транспонуванням.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

Як відомо, систему, яка об'єднує множини деяких сутностей, наприклад:

$$S\{s_1, s_2, \dots, s_m\},$$

які є вершинами орієнтованого графа, що зв'язані орієнтованими дугами і:

$$G\{g_1, g_2, \dots, g_r\},$$

можна відобразити за допомогою матриці суміжності:

$$[c_{ij}]_s = [i, j],$$

кожний рядок якої показує зв'язки однієї вершини з іншими вершинами графа [7]. Елемент $c_{ij}=1$ відображає дугу між вершинами S_i та S_j . Якщо $c_{ij}=0$, то дуга безпосередньо між вершинами графа i та j відсутня.

Зв'язки між елементами множин $S\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ і $G\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ можна описати також у вигляді матриці інцидентій:

$$[h_{ij}]_{s, g} = [i, j],$$

рядки якої відповідають вершинам, а стовпці дугам орієнтованого графа. При цьому h_{ij} -й елемент рівний +1, якщо S_i є початковою вершиною дуги і (-1), якщо S_i – кінцева вершина дуги [2].

Для аналізу структур застосовують матрицю суміжності, яка має специфічні властивості [7]. У разі послідовного зведення матриці суміжності у ступені $n=2, 3 \dots$ елементи n -го ступеня $(c_{ij})^n$ показують шлях, що містить n дуг, між i -ю та j -ю вершинами графа.

Множення матриць виконується за звичайним правилом [2]:

$$\begin{aligned} \|c_{ij}^{n+1}\| &= \left\{ \begin{matrix} c_{1.1}^n & c_{1.2}^n & \dots & c_{1.m}^n \\ c_{2.1}^n & c_{2.2}^n & \dots & c_{2.m}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m.1}^n & c_{m.2}^n & \dots & c_{m.m}^n \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} c_{1.1}^1 & c_{1.2}^1 & \dots & c_{1.m}^1 \\ c_{2.1}^1 & c_{2.2}^1 & \dots & c_{2.m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m.1}^1 & c_{m.2}^1 & \dots & c_{m.m}^1 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{matrix} \sum_{k=1}^m c_{1k}^n c_{k1}^1 & \sum_{k=1}^m c_{1k}^n c_{k2}^1 & \dots & \sum_{k=1}^m c_{1k}^n c_{km}^1 \\ \sum_{k=1}^m c_{2k}^n c_{k1}^1 & \sum_{k=1}^m c_{2k}^n c_{k2}^1 & \dots & \sum_{k=1}^m c_{2k}^n c_{km}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^m c_{mk}^n c_{k1}^1 & \sum_{k=1}^m c_{mk}^n c_{k2}^1 & \dots & \sum_{k=1}^m c_{mk}^n c_{km}^1 \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де n – ступені матриці суміжності; $n=1, 2, \dots$; m – загальне число вершин у схемі.

Для відображення зв'язків між елементами складних схем використаємо таке спрощення: наявність зв'язку, який визначається з (1), будемо означати значенням елемента матриці:

$$[c_{ij}^n]=1; \quad (2)$$

У разі відсутності зв'язку – $[c_{ij}^n]=0$. Тобто, операції множення (1) будемо виконувати за всіма прийнятими у математиці правилами, а на етапі відображення результатів виконаємо перетворення:

$$\|c_{ij}^{n+1}\| = \begin{cases} 1, \text{якщо } \sum_{k=1}^m c_{ik}^n c_{kj}^1 > 0 \text{ } \wedge \text{ } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}; \\ 0, \text{якщо } \sum_{k=1}^m c_{ik}^n c_{kj}^1 = 0 \text{ } \wedge \text{ } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (3)$$

Структурний аналіз складних систем застосовується в різних областях знань. В опублікованих роботах щодо структурного аналізу складних схем приводяться, часто без доказу, рекомендації у вигляді алгоритмів, для пошуку циклів [8]. За допомогою структурного аналізу компетенцій NCB показано, що цикли в матриці компетенцій NCB є основою для формування ядер знань [7]. В роботі [9] розглянуто низку питань, пов'язаних з оцінкою і управлінням складністю в проектах, які демонструють очевидну значимість структурного аналізу. Структурний аналіз став підґрунтям для вивчення взаємозв'язку між індивідами і обміну знаннями в організаціях будівельного проекту [10]. Теоретично обґрунтовано, що існує вплив фундаментальних стратегічних змін з вибору проекту і організаційної структури [11]. Автори [12] змоделювали можливі модифікації алгоритму управління топологією системи і навколишнього середовища, вико-

ристовуючи правила перетворення графа. В публікації [13] наведено аналіз поєднання традиційних і компетентнісних підходів до навчання і оцінки результатів. На основі теорії графів в роботі [14] запропоновано модель для побудови траєкторії навчання. Розробка марківської моделі зміни станів проектно-керованої організації виконана на основі структурного аналізу системи [15]. Дослідження структури індикаторів цінності в проектах виконано в роботі [16]. Моделювання взаємодії команди, оточення і проекту в структурі управління наведено в роботі [17]. Дослідженню ергодичності орієнтованого графу системи проектного управління присвячена робота [18]. Концептуальну модель класифікації структури контенту документів досліджено в роботі [19]. В цій роботі показано пошук неповних дублікатів в структурі контенту документів.

Означені приклади свідчать, що теоретичне обґрунтування методів аналізу структур управління і сукупностей компетентностей є перспективним в проектному менеджменті, оскільки структури проектних систем та інформаційні зв'язки в них суттєво впливають на результати діяльності

5. Методи дослідження

Виконаємо дослідження методів представлення різних структур за допомогою матриці суміжності. Розглянемо властивості матриць суміжності і її ступенів з точки зору застосування цих властивостей для структурного аналізу проектних систем.

Лема 1. Дві дуги, одна з яких входить, а інша виходять з однієї вершини, складають два елементи в матриці суміжності. Ці елементи зміщені від головної діагоналі на 1 стовпець за напрямом дуг. Таке може бути тоді і тільки тоді, коли три вершини орієнтованого графа представлено суміжними стовпцями.

Доказ. За правилом відображення орієнтованих графів в матриці суміжності номери рядків відповідають номеру вершини графа, з якої виходить дуга. А номери стовпців – номеру вершини, в яку входить дуга. Відмітимо, що в будь-якому орієнтованому графі, що має контур, можна виділити лінійну частину контуру у напрямі дуг орієнтованого графа і зворотний зв'язок (дугу), що утворює цикл.

Номери вершин орієнтованого графа відіграють скоріше роль ідентифікаторів вершин і не визначають обов'язковий порядок слідування в матриці суміжності. Вони не впливають на структуру зв'язків між вершинами. Тому приймемо припущення, що вершини орієнтованого графа можуть бути пронумеровані довільним чином. Тому накладемо умову на присвоєння вершинам графа номерів: у лінійному підграфі $s \in S$ вершини нумеруються за напрямом дуг орграфу.

Розглянемо орієнтований граф з таких вершин: a, b, c, d, e, f, g . Хай вершини графа сполучені зв'язками: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g$. Оскільки вершини орієнтованого графа можуть бути пронумеровані довільним чином, приймемо таку нумерацію:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \{i\}; \\ b &\rightarrow \{i+1\}; \\ c &\rightarrow \{i+2\}; \\ d &\rightarrow \{i+3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &\rightarrow \{i+4\}; \\ f &\rightarrow \{i+5\}; \\ g &\rightarrow \{i+6\}. \end{aligned} \quad (4)$$

У цьому випадку в матриці суміжності, у наслідок (4), рядки і стовпці, що відповідають вершинам a, b, \dots, g , будуть розташовані послідовно, а значення відповідних елементів матриці суміжності буде таким:

$$\begin{aligned} c_{i,i+1} &= c_{a,b} = 1; \\ c_{i+1,i+2} &= c_{b,c} = 1; \\ &\dots \\ c_{i+5,i+6} &= c_{f,g} = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

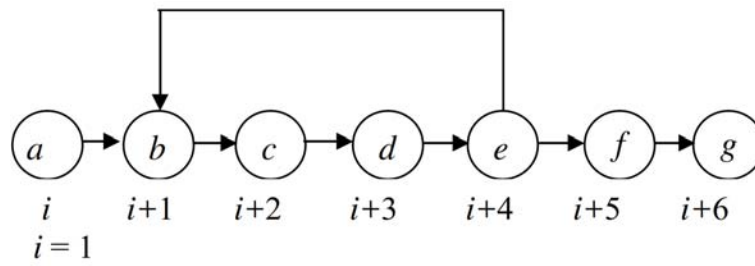
Визначені у (5) елементи матриці суміжності зміщені на один стовпець від головної діагоналі. Тобто дуги лінійної частини орієнтованого графа відображаються в матриці суміжності діагоналлю, яка паралельна головній. Вона зміщена на 1 стовпець за умови, що вершини розташовані в матриці суміжності послідовно за напрямом дуг орієнтованого графа (рис. 1).

		До вершини						
		a	b	c	d	e	f	g
Від вершини	a	0	1	0	0	0	0	0
	b	0	0	1	0	0	0	0
	c	0	0	0	1	0	0	0
	d	0	0	0	0	1	0	0
	e	0	0	0	0	0	1	0
	f	0	0	0	0	0	0	1
	g	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1. Матриця суміжності фрагмента лінійної частини орграфа

Таким чином, дуга, яка не утворює діагональ, що паралельна головній, не відноситься до лінійної частини дуг орієнтованого графа. Наприклад, у разі існування контуру, що утворений дугою між вершинами $e \rightarrow b$, у матриці суміжності елемент $[c_{eb}] = 1$, або з урахуванням нумерації (4), отримаємо значення $[c_{i+4,i+2}] = 1$ (рис. 2).

Як видно з рис. 2, відображення дуги між вершинами $e \rightarrow b$ у матриці суміжності здійснюється через значення елемента $[c_{i+4,i+2}] = 1$. Цей елемент утворює «трикутник» з лінійною частиною контуру орієнтованого графа.



a

		До вершини $i+\dots$						
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
Від вершини	<i>a</i>	0	1	0	0	0	0	0
	<i>b</i>	0	0	1	0	0	0	0
	<i>c</i>	0	0	0	1	0	0	0
	<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	0
	<i>e</i>	0	1	0	0	0	1	0
	<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
	<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

б

Рис. 2. Матриця суміжності з дугою $e \rightarrow b$, що утворює цикл:
a – орієнтований граф; *б* – матриця суміжності орграфу *a*

Означена властивість відображення циклів за допомогою матриці суміжності є основою для структурного аналізу.

Лема 2. Елементи всіх стовпців контуру, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені $n+1$ на один стовпець за напрямом ребер орієнтованого графа.

Доказ. Скористаємося властивістю про довільну нумерацію вершин. При цьому відмінні від нуля елементи матриці суміжності ступеня $n=1$:

$$\begin{aligned} c_{i,i+1}^1 &= 1, \quad i=k, k+1, \dots, m-1; \quad k \in 1, \dots, m-1; \\ c_{m,k}^1 &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

де k, m – початкова і кінцева вершини, що входять в контур, $k < m$.

З (2) знайдемо елементи матриці суміжності ступеня $n+1$:

$$c_{ij}^{n+1} = \sum_{h=k}^m c_{ih}^n \cdot c_{hj}^1, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Виконаємо обчислення значень елементів одного з рядків $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ матриці суміжності ступеня $n+1$:

$$c_{s,1}^{n+1} = c_{s,1}^n \cdot c_{1,1}^1 + c_{s,2}^n \cdot c_{2,1}^1 + c_{s,3}^n \cdot c_{3,1}^1 + \dots + c_{s,m}^n \cdot c_{m,1}^1;$$

$$\begin{aligned}
c_{s,2}^{n+1} &= c_{s,1}^n \cdot (c_{1,2}^1) + c_{s,2}^n \cdot c_{2,2}^1 + c_{s,3}^n \cdot c_{3,2}^1 + \dots + c_{s,m}^n \cdot c_{m,2}^1; \\
c_{s,3}^{n+1} &= c_{s,1}^n \cdot c_{1,3}^1 + c_{s,2}^n \cdot (c_{2,3}^1) + c_{s,3}^n \cdot c_{3,3}^1 + \dots + c_{s,m}^n \cdot c_{m,3}^1; \\
&\vdots \\
c_{s,m}^{n+1} &= c_{s,1}^n \cdot c_{1,m}^1 + c_{s,2}^n \cdot c_{2,m}^1 + \dots + c_{s,m-1}^n \cdot (c_{m-1,m}^1) + c_{s,m}^n \cdot c_{m,m}^1,
\end{aligned} \tag{8}$$

де m – номер елемента в рядку.

Дужками виділені ненульові елементи $c_{i,i+1}=1$ ($i=1, 2, \dots, m-1$) матриці суміжності. Відкинувши решту елементів, отримаємо в загальному випадку, що значення елемента рядка $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ для лінійної частини графа буде визначатись першим множником:

$$c_{s,h}^{n+1} = c_{s,h-1}^n; \quad h=2, 3, \dots, m. \tag{9}$$

Наприклад, з (9) для $n=1$ та $s=1$ отримаємо:

$$c_{1,h}^2 = c_{1,h-1}^1.$$

Це означає, що елемент першого рядка $c_{1,2}^1=1$ переміститься з другого на третій стовпець $c_{1,3}^2=1$. За аналогією, для 1-го і наступних рядків елементи, що відображають лінійну частину графа, у разі піднесення до наступних ступенів будуть переміщатися на один стовпець за напрямом дуг графа.

Графічна інтерпретація доказу на прикладі обчислення елемента матриці $[c_{2,4}^2]$ показана на рис. 3.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

×

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

=

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 3. Схема зміщення елемента $[c_{2,3}^1]=1$ на один стовпець у елемент матриці $[c_{2,4}^2]=1$, що є результатом множення матриць

Для визначення з (2) значення елемента $[c_{2,4}^2]$ слід перемножити елементи рядка 2 і стовпця 4 та визначити суму. Як видно, тільки два елементи 2-го рядка – $[c_{2,3}^1]=1$ і 4-го стовпця – $[c_{3,4}^1]=1$, мають значення відмінні від нуля. Саме вони за (2) дадуть значення $[c_{2,4}^2]=[c_{2,3}^1] \times [c_{3,4}^1]=1$. У загальному випадку, для прикладу на рис. 3, отримаємо:

$$\begin{aligned}
[c_{1,3}^2] &= [c_{1,2}^1]; \\
[c_{2,4}^2] &= [c_{2,3}^1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[c^2_{3,5}] &= [c^1_{3,4}]; \\
[c^2_{4,6}] &= [c^1_{4,5}]; \\
[c^2_{5,7}] &= [c^1_{5,6}].
\end{aligned} \tag{10}$$

Доведено, що елементи всіх стовпців лінійної частини орієнтованого графа, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені $n+1$ на один стовець за напрямом ребер орієнтованого графа.

Лема 3. В ступені $n+1$ матриці суміжності елементи останнього стовпця контуру ступеня n переходять в 1-й стовець контуру.

Доказ. Хай дано орієнтований граф з контуром, що відображається матрицею суміжності з умовами, прийнятими в лемі 2 (рис. 2).

Розглянемо формування будь-якого стовпця k матриці суміжності ступеня $n+1$. Елементи стовпця k обчислюються за (2):

$$\begin{aligned}
c^{n+1}_{1,k} &= c^n_{1,1} \cdot c^1_{1,k} + c^n_{1,2} \cdot c^1_{2,k} + \dots + c^n_{1,m-2} \cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{1,m-1} \cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{1,m} \cdot c^1_{m,k}; \\
c^{n+1}_{2,k} &= c^n_{2,1} \cdot c^1_{1,k} + c^n_{2,2} \cdot c^1_{2,k} + \dots + c^n_{2,m-2} \cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{2,m-1} \cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{2,m} \cdot c^1_{m,k}; \\
c^{n+1}_{3,k} &= c^n_{3,1} \cdot c^1_{1,k} + c^n_{3,2} \cdot c^1_{2,k} + \dots + c^n_{3,m-2} \cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{3,m-1} \cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{3,m} \cdot c^1_{m,k}; \\
c^{n+1}_{4,k} &= c^n_{4,1} \cdot c^1_{1,k} + c^n_{4,2} \cdot c^1_{2,k} + \dots + c^n_{4,m-2} \cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{4,m-1} \cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{4,m} \cdot c^1_{m,k}; \\
&\vdots \\
c^{n+1}_{m,k} &= c^n_{m,1} \cdot c^1_{1,k} + c^n_{m,2} \cdot c^1_{2,k} + \dots + c^n_{m,m-2} \cdot c^1_{m-2,k} + c^n_{m,m-1} \cdot c^1_{m-1,k} + c^n_{m,m} \cdot c^1_{m,k}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для системи рівнянь (11) слід ввести початкові умови: номери початку k та кінця циклу r . Наприклад, для схеми на рис. 2 такими даними будуть $k=b=2$ і $r=e=5$. За таких умов елемент 2-го множника $[c^1_{5,2}]=1$. А передостанній елемент контуру у першому множнику матриці $[c^{(n=1)}_{4,5}]=1$, як слідство Лемі 1 щодо паралельності головній діагоналі матриці елементів лінійної частини циклу.

Відкинувши нульові елементи з (11), і приймаючи значення відомих за початковими умовами елементів, отримаємо для $n=1$:

$$c^2_{4,2} = c^1_{4,5} \cdot c^1_{5,2}. \tag{12}$$

Графічна інтерпретація доказу Лемі 3 на прикладі обчислення елемента результуючої матриці $[c^2_{4,2}]$ показана на рис. 4.

Для визначення з (2) значення елемента $[c^2_{4,2}]$ слід перемножити елементи рядка 4 і стовпця 2 та визначити суму. Елементи 4-го рядка та 2-го стовпця і результату множення виділені на рис. 4. Саме вони у відповідності до (2) дадуть значення: $[c^2_{4,2}]=[c^1_{4,5}] \times [c^1_{5,2}]=1$.

Другий множник не змінюється і завжди $[c^1_{r,k}]=1$. Тому у загальному випадку у разі піднесення до наступних ступенів елементи будуть перескакувати з передостаннього стовпця $(r-1)$ у перший стовець k контуру. Це є вірним для всіх стовпців елементів, що відображають лінійну частину орієнтованого графа.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

 \times

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0

 $=$

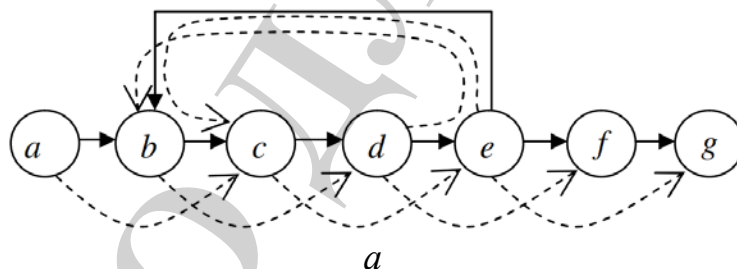
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 4. Схема перескакування елемента $[c^1_{4,5}]$ з контуру першого множника у перший стовпець $[c^2_{4,2}]=1$ у результаті множення матриць

Лема 4. Зв'язки між вершинами графа через $1 \dots n$ дуг відображають ступені матриці суміжності від 1 до n , відповідно.

Доказ. Як визначено у лемі 2 елементи всіх стовпців контуру, окрім останнього, матриці суміжності ступеня n зміщуються у ступені $n+1$ на один стовпець за напрямом ребер орграфа. Тобто кожний $n+1$ ступень відображає зв'язки від i -ої до $n+1$ вершини графа. Так, зв'язки отримані на основі 2-го ступеня матриці суміжності відображають зв'язки у графі через одну транзитну вершину (пунктир, рис. 5, а).

Як видно, нові зв'язки сполучають ті вершини, які в початковій матриці були сполучені двома дугами (рис. 4, 5). Ці висновки вірні і для 3-го ступеня матриці суміжності, з тією відмінністю, що виявлені зв'язки вже проходять через три дуги і дві транзитні вершини графа (рис. 6).



		До вершини						
		a	b	c	d	e	f	g
Від вершини	a	0	0	1	0	0	0	0
	b	0	0	0	1	0	0	0
	c	0	0	0	0	1	0	0
	d	0	1	0	0	0	1	0
	e	0	0	1	0	0	0	1
	f	0	0	0	0	0	0	0
	g	0	0	0	0	0	0	0

б

Рис. 5. Відображення зв'язків у матриці суміжності 2-го ступеня через одну транзитну вершину графа: а – зв'язки на орієнтованому графі; б – матриця суміжності 2-го ступеня

Як видно з рис. 6, існує певна закономірність у зміні зв'язків, що характерні для різних ступенів матриці суміжності.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	0	0	0	0	0
<i>b</i>	0	0	1	0	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>e</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

a

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	1	0	0	0	0
<i>b</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>d</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>e</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

б

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>b</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>c</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>d</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>e</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

в

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>b</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>c</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>d</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>e</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

г

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>b</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>c</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>e</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

д

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>b</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>d</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>e</i>	0	0	1	0	0	0	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

е

Рис. 6. Зміщення елементів матриці суміжності у ступенях від $n=1$ до $n=6$:

$a - n=1$; $б - n=2$; $в - n=3$; $г - n=4$; $д - n=5$; $е - n=6$

Елементи матриці суміжності переміщуються справа наліво (за напрямом дуг орграфа). У той же час специфічний шлях (з перескакуванням) проходять передостанні елементи циклу. Означені властивості ступенів матриць суміжності дозволяють висунути гіпотезу про можливість розрахункового визначення контурів у орієнтованому графі.

6. Результати дослідження

Прийmemo твердження, булева сума матриць суміжності ступенів від 1 до m є матрицею досяжності, яка формує граф всіх шляхів схеми, включаючи замкнений контур.

Доказ. Скористаємося висновками лемми 4. Для отримання матриці R^n всіх шляхів орієнтованого графа або матриці досяжності утворимо булеву суму всіх

ступенів матриці суміжності, представлені на рис. 6. Елементи $[r_{ij}]$ матриці досяжності визначаються з використання операцій диз'юнкції (\vee) або кон'юнкції (\wedge). Матриця досяжності першого рангу $\mathbf{R}^{(1)}$ є тотожною матриці суміжності \mathbf{C}^1 першого ступеня:

$$[r_{ij}^{(1)}] = [c_{ij}^1], \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (13)$$

Матриці досяжності наступних рангів $\mathbf{R}^{(n)}$ для значень $n > 1$ визначаються з використанням матриць досяжності рангів $(n-1)$ і матриць суміжності відповідних ступенів:

$$[r_{ij}^{(2)}] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (r_{ij}^{(1)} = 1) \vee (c_{ij}^2 = 1), \\ 0, & \text{якщо } (r_{ij}^{(1)} = 0) \wedge (c_{ij}^2 = 0); \end{cases}$$

$$[r_{ij}^{(3)}] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (r_{ij}^{(2)} = 1) \vee (c_{ij}^3 = 1), \\ 0, & \text{якщо } (r_{ij}^{(2)} = 0) \wedge (c_{ij}^3 = 0); \end{cases}$$

$$[r_{ij}^{(n)}] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (r_{ij}^{(n-1)} = 1) \vee (c_{ij}^n = 1), \\ 0, & \text{якщо } (r_{ij}^{(n-1)} = 0) \wedge (c_{ij}^n = 0). \end{cases} \quad (14)$$

Матриця досяжності \mathbf{R}^n містить всі зв'язки від вершини i до вершини j через n дуг графа (рис. 7).

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	0	0	0	0	0
<i>b</i>	0	0	1	0	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	1	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	1	0	0
<i>e</i>	0	1	0	0	0	1	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

a

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	1	0	0	0	0
<i>b</i>	0	0	1	1	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	1	1	0	0
<i>d</i>	0	1	0	0	1	1	0
<i>e</i>	0	1	1	0	0	1	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

б

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	1	1	0	0	0
<i>b</i>	0	0	1	1	1	0	0
<i>c</i>	0	1	0	1	1	1	0
<i>d</i>	0	1	1	0	1	1	1
<i>e</i>	0	1	1	1	0	1	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

в

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	1	1	1	0	0
<i>b</i>	0	1	1	1	1	1	0
<i>c</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>d</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>e</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

г

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	1	1	1	0
b	0	1	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

δ

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

e

Рис. 7. Матриця досяжності \mathbf{R}^n для різних n : $a - n=1$; $b - n=2$; $c - n=3$; $d - n=4$; $e - n=5$; $e - n=6$

У міру зростання ступенів n матриць суміжності матриця досяжності \mathbf{R}^n стає заповненою одиницями у наслідок справедливості леми 2. Заповнена одиницями підматриця показує, що всі її вершини мають зв'язок у напрямі дуг графа. А це і є описанням всіх можливих шляхів в орграфі за напрямом дуг графа. При цьому в деяких рядках елементи головної діагоналі (ГД) матриці досяжності мають значення $[r_{ii}]=1$. Це є ознакою того, що цей рядок містить в собі опис шляху в орграфі від елемента $i \rightarrow i$. Наявність такого шляху від елемента i до i можливий в циклі орієнтованого графа. Слід також вказати, що деякі елементи рядка i , у якому існує зв'язок $i \rightarrow i$, не входять до замкненого контуру. Оскільки за напрямом дуг графа від вершини i є шлях до кінцевих вершин графу, наприклад, до вершин f і g на рис. 2.

Щоб визначити всі підсистеми, що існують в графі і входять у контур, виконаємо заміну напрямів на зворотні усіх дуг графа шляхом транспонування матриці досяжності $\mathbf{R}^n \rightarrow (\mathbf{R}^n)^T$ з подальшою суперпозицією $\mathbf{W} = \mathbf{R} \cap \mathbf{R}^T$. Елементи матриці суперпозиції $\mathbf{W} = \mathbf{R} \cap \mathbf{R}^T$ формуються з використання операцій диз'юнкції (\vee – логічне «АБО») або кон'юнкції (\wedge – логічне «ТА») наступним чином:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (r_{ij} = 1) \wedge (r_{ji}^T = 1), \\ 0, & \text{якщо } (r_{ij} = 0) \vee (r_{ji}^T = 0). \end{cases} \quad (15)$$

Ненульові елементи ГД матриці \mathbf{W} вказують на рядок, що містить всі шляхи контуру. Виділені контури, в яких всі елементи мають зв'язок з усіма іншими елементами, складають основу ергодичної підмножини орієнтованого графа. При цьому інформативним є не тільки кінцевий результат матриця суперпозиції \mathbf{W}^n , а й результати, які показують формування замкнених циклів.

Виконаємо транспонування матриці досяжності $\mathbf{R}^6 \rightarrow (\mathbf{R}^6)^T$, яка приведена на рис. 7, e , з подальшою суперпозицією $\mathbf{W}^6 = \mathbf{R}^6 \cap (\mathbf{R}^6)^T$ (рис. 8).

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>b</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>c</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>d</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>e</i>	0	1	1	1	1	1	1
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	1
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

a

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>b</i>	1	1	1	1	1	0	0
<i>c</i>	1	1	1	1	1	0	0
<i>d</i>	1	1	1	1	1	0	0
<i>e</i>	1	1	1	1	1	0	0
<i>f</i>	1	1	1	1	1	0	0
<i>g</i>	1	1	1	1	1	1	0

б

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>b</i>	0	1	1	1	1	0	0
<i>c</i>	0	1	1	1	1	0	0
<i>d</i>	0	1	1	1	1	0	0
<i>e</i>	0	1	1	1	1	0	0
<i>f</i>	0	0	0	0	0	0	0
<i>g</i>	0	0	0	0	0	0	0

в

Рис. 8. Матриця суперпозиції $W^6 = R^6 \cap (R^6)^T$, яка отримана на основі матриці досяжності R^6 приклада на рис. 6: *a* – R^6 ; *б* – $(R^6)^T$; *в* – $W^6 = R^6 \cap (R^6)^T$

Як видно з результатів суперпозиції (рис. 8, *в*), розроблений метод дозволяє визначити в орієнтованому графі наявність замкненого контуру, який включає такі вершини, що сполучені зв'язками: $b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b$.

Покажемо застосування теоретичних положень дослідження на прикладі структурного аналізу фрагмента контекстуальних компетенцій у сфері професійного управління проектами. Як відомо, галузь знань управління проектами охоплює три основні напрямки компетенцій: технічні - 20 елементів, поведінкові - 15 елементів та контекстуальні - 11 елементів [3]. Крім того у NCB (вер. 3.1) визначені також додаткові компетенції (національні та галузеві) – 6 елементів [3]. Вказані 52 елемента компетенцій мають складні взаємозв'язки, що у сукупності формує область знань проектного управління. З огляду на суттєву взаємозалежність вказаних елементів компетенцій висунута гіпотеза щодо існування в цій області знань певних сукупностей компетенцій, які пов'язані між собою сильними зв'язками, що дозволяє визначити їх як «ядра» знань (компетенцій). Всі елементи «ядра» знань утворюють повний підграф множини компетенцій.

Сукупність контекстуальних компетенцій і матриця суміжності, яка відображає зв'язки між елементами в групі контекстуальних компетенцій без урахування зв'язків з іншими групами, приведені у табл. 1.

Таблиця 1

Матриця суміжності групи контекстуальних компетенцій

Контекстуальні компетенції	Зв'язки контекстуальних компетенцій (3.xx)										
	3.01	3.02	3.03	3.04	3.05	3.06	3.07	3.08	3.09	3.10	3.11
3.01. Проектно-орієнтоване управління	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3.02. Програмно-орієнтоване управління	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3.03. Портфельно-орієнтоване управління	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3.04. Реалізація програм /портфелів /проектів	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
3.05. Стала організація	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
3.06. Підприємницька діяльність	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
3.07. Системи, продукти та технології	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
3.08. Управління персоналом	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3.09. Здоров'я, безпека, охорона праці	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3.10. Фінанси	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3.11. Юридичні аспекти	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Визначимо ядра знань на основі аналізу. Для спрощення не будемо вказувати номер 3-ої групи контекстуальних компетенцій, як це прийнято в NCB версії 3.1 [3]. За розробленим методом аналітичного аналізу орграфів розрахуємо послідовно другий, третій і наступні степені матриці суміжності. Далі визначимо матриці досяжності і суперпозиції для всіх ступенів. Отримані результати дозволяють зробити висновок, що у підсистемі контекстуальних компетенцій існують контури зв'язків, які об'єднують споріднені за знаннями компетенції.

Виконаємо транспонування матриці досяжності $R^3 \rightarrow (R^3)^T$, отриману за даними табл. 1, з подальшою суперпозицією $W^6 = R^6 \cap (R^6)^T$ (рис. 9).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 9. Матриця суперпозиції $W^3 = R^3 \cap (R^3)^T$, яка отримана на основі матриці досяжності R^3 за даними табл. 1

Як видно, ядра знань контекстуальних компетенцій у матриці суперпозиції $W^3 = R^3 \cap (R^3)^T$ утворюють елементи: 3.1 ... 3.4; а також сукупність з елементів 3.5, 3.6, 3.8, 3.10. Ці два ядра знань об'єднані в окремі комплекси, які виділені для наочності кольором.

Окремої уваги заслуговують елементи: 3.7 (Управління персоналом); 3.9 (Здоров'я, безпека, охорона праці) та 3.11 (Юридичні аспекти). Ці елементи сполучені з компетенціями інших груп – технічних і поведінкових компетенцій.

Таким чином, на основі аналізу фрагменту зв'язків у групі контекстуальних компетенцій у сфері професійного управління проектами показано, що в цій групі існують ядра знань - сукупності компетенцій, які пов'язані між собою сильними зв'язками і утворюють систему взаємозв'язаних елементів. Такий висновок дозволяє формувати зміст навчальних дисциплін.

7. SWOT-аналіз результатів досліджень

Strengths. Сильними сторонами представленого в роботі підходу є:

1. Наочність в поданні результатів – як кінцевих результатів аналізу (матриця досяжності), так і його проміжних кроків (матриці суміжності).

2. Математичний апарат, необхідний для розрахунків, не важкий в розумінні. Кроки (етапи) формування моделі зрозумілі, добре піддаються алгоритмізації.

3. Основні математичні операції (дії з матрицями), необхідні для формування моделі і її обробки, представлені на сьогоднішній день в більшості табличних редакторів, що входять в сімейство стандартного офісного програмного забезпечення.

4. Програмне забезпечення, що необхідне для розрахунків розповсюджується, як на платній основі, наприклад Microsoft Excel, так і на безкоштовній, або умовно-безкоштовній основі, наприклад, в складі LibreOffice. Існують версії, як для операційної системи Windows, так і для MacOS і Linux.

5. З огляду на п.п. 2–4, для використання запропонованого підходу немає необхідності в розробці спеціального програмного забезпечення. Необхідні дії може виконати будь-який кваліфікований користувач (не програміст).

6. Сильною стороною, можливо навіть найбільш значущою перевагою представленого підходу, може бути аналіз топології для складних моделей компетенцій з великим числом взаємопов'язаних елементів. Такий аналіз дозволить виконати спрощення моделі і виявити «вузли», які надають максимальний вплив на всю систему.

Weaknesses. Слабкими сторонами представленого в роботі підходу є:

1. У разі аналізу складних моделей компетенцій (таких, як, наприклад, NCB 3.0), що включають велику кількість елементів, може втрачатися наочність.

2. При побудові галузевих моделей може знадобитися додатково досить значний обсяг трудовитрат для формування матриці суміжності на основі експертної оцінки. При цьому також виникне необхідність проведення кореляційного аналізу (що, втім, при серйозному підході, швидше є неминучим фактором).

Opportunities. Можливостями для представленого в роботі підходу є:

1. Легкість для впровадження і використання в діяльності конкретних підприємств різних сфер діяльності (на підставі переліку сильних сторін). Це мінімізує потребу в спеціальному навчанні, ліцензуванні права використання дано-

го підходу, відсутність потреби в необхідності придбання додаткового програмного забезпечення.

2. Можливість використання в діяльності кадрових служб і відділів управління людськими ресурсами підприємств. Як для формування вимог до фахівців і керівників, так і для оцінки компетенцій. Як при прийомі на роботу, так і в процесі виробничої діяльності. Наприклад, при формуванні проектних команд, розробці вимог до освітніх програм і ін.

3. Використання даного підходу може бути рекомендовано для розрахунку такого показника як «повернення на знання» в розширеній моделі Кіркпатріка.

4. Можливе створення з використанням представленого підходу цілого сімейства спеціалізованих програмних продуктів - від шаблонів для найбільш поширених табличних редакторів до мобільних додатків.

5. Можливе створення спеціалізованого інтернет-ресурсу, який надає можливість формування, аналізу та подальшого коригування моделі для підприємств різної галузевої спрямованості з метою створення бази даних для подальшого уточнення моделі (на умовах знеособленості).

Threats. Погрозами для представленого в роботі підходу є:

1. Нехтування необхідністю адаптації даного підходу під потреби (специфіку) конкретного підприємства, що може привести до невірної інтерпретації результатів, зроблених на основі «універсальної базової моделі». Навіть, якщо вона буде зроблена на основі самої останньої версії міжнародного стандарту.

2. Можлива протидія використанню даного підходу з боку окремих осіб та організацій, зацікавлених у просуванні платних сервісів у сфері проектування, оцінки та розвитку компетенцій персоналу.

3. Складність у можливій процедурі патентного захисту, як самого методу, так і його можливих «похідних». Це обумовлено простотою основних принципів його роботи і доступністю для користувачів засобів обчислень для створення і обробки моделей.

8. Висновки

1. Розроблено метод дослідження властивостей матриці суміжності орієнтованих графів та її ступенів. Показано, що ступені матриці суміжності наслідують загальну структуру орієнтованого графу з певними закономірностями відображення дуг графу. Це дозволяє будувати матрицю досяжності досліджуваної топологічної структури з виділенням контурів в оргграфі.

2. Розроблено методику ідентифікації циклів у графах на основі формування мулевої суми ступенів матриці досяжності з подальшим її транспонуванням і суперпозицією. Це дозволяє отримати відображення контуру в графі у формі квадратної під матриці, заповненої одиницями.

Література

1. Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis [Text] / L. Euler // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. - 1741. - Vol. 8. - P. 128–140.
2. Tutte, W. T. Graph Theory As I Have Known It [Text] / W. T. Tutte. - Oxford University Press, 2012. - 164 p.
3. ICB - IPMA Competence Baseline, Version 3.0 [Electronic resource]. - Project Management Association, 2006. - 212 p. - Available at: \www/URL: <http://www.ipma.world/assets/ICB3.pdf>
4. ICB - IPMA Individual Competence Baseline, Version 4.0 [Electronic resource]. - International Project Management Association, 2015. - 432 p. - Available at: \www/URL: http://products.ipma.world/wp-content/uploads/2016/03/IPMA_ICB_4_0_WEB.pdf
5. A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK® Guide) [Text]. - Ed. 5. - Project Management Institute, 2013. - 619 p.
6. Project Manager Competency Development Framework [Text]. - Ed. 2. - Project Management Institute, 2007. - 81 p.
7. Kolesnikova, K. V. Analiz strukturnoi modeli kompetentsii z upravlinnia proektamy natsionalnoho standartu Ukrainy [Electronic resource] / K. V. Kolesnikova, D. V. Lukianov // Management of development of complex systems. - 2013. - № 13. - P. 19–27. - Available at: \www/URL: <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-13/19-27.pdf>
8. Kafarov, V. V. Printsipy matematicheskogo modelirovaniia himiko-tehnologicheskikh sistem [Text] / V. V. Kafarov, V. L. Perov, V. P. Meshalkin. - Moscow: Khimiia, 1974. - 344 p.
9. Qureshi, S. M. Analysing the organizational factors of project complexity using structural equation modelling [Text] / S. M. Qureshi, C. Kang // International Journal of Project Management. - 2015. - Vol. 33, № 1. - P. 165–176. doi:10.1016/j.ijproman.2014.04.006
10. Wen, Q. Coordination and Knowledge Sharing in Construction Project-Based Organization: A Longitudinal Structural Equation Model Analysis [Text] / Q. Wen, M. Qiang // Automation in Construction. - 2016. - Vol. 72. - P. 309–320. doi:10.1016/j.autcon.2016.06.002
11. Kaiser, M. G. Successful project portfolio management beyond project selection techniques: Understanding the role of structural alignment [Text] / M. G. Kaiser, F. el Arbi, F. Ahlemann // International Journal of Project Management. - 2015. - Vol. 33, № 1. - P. 126–139. doi:10.1016/j.ijproman.2014.03.002
12. Kluge, R. A systematic approach to constructing incremental topology control algorithms using graph transformation [Text] / R. Kluge, M. Stein, G. Varro, A. Schurr, M. Hollick, M. Muhlhauser // Journal of Visual Languages & Computing. - 2016. doi:10.1016/j.jvlc.2016.10.003
13. Koenen, A.-K. A phenomenographic analysis of the implementation of competence-based education in higher education [Text] / A.-K. Koenen, F. Dochy, I. Berghmans // Teaching and Teacher Education. - 2015. - Vol. 50. - P. 1–12. doi:10.1016/j.tate.2015.04.001

14. Durand, G. Graph theory based model for learning path recommendation [Text] / G. Durand, N. Belacel, F. LaPlante // Information Sciences. – 2013. – Vol. 251. – P. 10–21. doi:10.1016/j.ins.2013.04.017
15. Kolesnikova, E. V. Development of the Markov model of states of a project-controlled organization [Text] / E. V. Kolesnikova, V. A. Vaisman, V. A. Velichko // Modern technologies in engineering. – 2012. – № 7. – P. 217–223.
16. Kolesnikova, K. V. Matrix diagram and the «strong connection» indicator value in the projects [Text] / K. V. Kolesnikova, T. M. Olekh // Electrical and Computer Systems. – 2012. - № 7 (83). – P. 148–153.
17. Kolesnikov, O. Development of the model of interaction among the project, team of project and project environment in project system [Text] / O. Kolesnikov, V. Gogunskii, K. Kolesnikova, D. Lukianov, T. Olekh // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – № 5/9 (83). – P. 20–26. doi:10.15587/1729-4061.2016.80769
18. Kolesnikova, K. V. Method of determining a directed graph ergodic systems project management [Electronic resource] / K. V. Kolesnikova, S. V. Paliy // Management of development of complex systems. - 2014. - № 20. – P. 27-31. – Available at: \www/URL: http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-20/8_0.pdf
19. Biloshchytskyi, A. Conceptual Model of Automatic System of Near Duplicates Detection in Electronic Documents [Text] / A. Biloshchytskyi, A. Kuchansky, S. Biloshchytska, A. Dubnytska // 14-th International Conference «The Experience of Designing and Applications of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM'17), IEEE. – Polyana, 2017. – P. 381-384.